



FUNCIONS



Matemàtiques. 4t ESO



Reconocimiento-No comercial-Compartir bajo la misma licencia 3.0 España

Usted es libre de:



copiar, distribuir y comunicar públicamente la obra



hacer obras derivadas

Bajo las condiciones siguientes:



Reconocimiento. You must attribute this work to [Departament de Matemàtiques de l'IES el SUI](#) (with link).

Attribute this work:

```
<div xmlns:cc="http://creativecommons.org/ns#" about="http://www.xtec.cat/ieselsui" data-bbox="359 464 838 478">
```



No comercial. No puede utilizar esta obra para fines comerciales.



Compartir bajo la misma licencia. Si altera o transforma esta obra, o genera una obra derivada, sólo puede distribuir la obra generada bajo una licencia idéntica a ésta.

- Al reutilizar o distribuir la obra, tiene que dejar bien claro los términos de la licencia de esta obra.
- Alguna de estas condiciones puede no aplicarse si se obtiene el permiso del titular de los derechos de autor
- Nada en esta licencia menoscaba o restringe los derechos morales del autor.

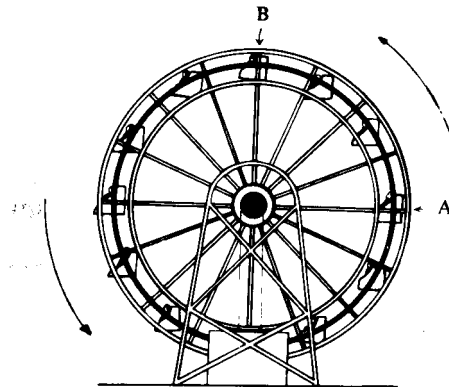
Advertencia

Los derechos derivados de usos legítimos u otras limitaciones reconocidas por ley no se ven afectados por lo anterior.

A. Funcions: introducció

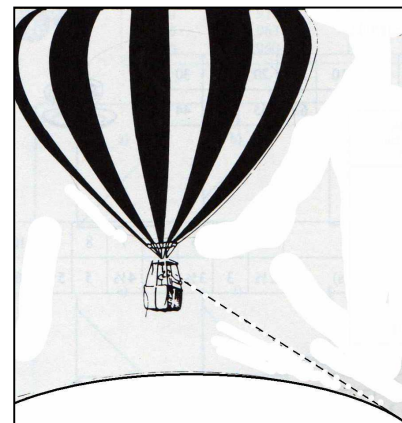
A.1. La sínia

La sínia del dibuix dóna una volta cada 16 segons. Utilitzant el mateix parell d'eixos, fes dos gràfics que mostrin com varia l'altura de la cistella A i la de la B durant un minut. Descric com canviarien els gràfics si la sínia girés més apressa.



A.2. Fins a quina distància es pot veure?

Altura del globus (m)	Distància fins l'horitzó (km)
5	8
10	11
20	16
30	20
40	23
50	25
100	36
500	80
1.000	112



Fixa't amb molta atenció en la taula anterior.

Sense marcar els punts exactament, intenta dibuixar el gràfic aproximat que descriu la relació entre l'altura del globus i la distància a l'horitzó.



Explica el mètode que has utilitzat

A.3. Taules i gràfics

Sense dibuixar els punts, escull entre els gràfics que hi ha a la pàgina següent aquell que s'ajusti millor a cadascuna de les taules. Copia en cada cas el gràfic més convenient, posa-hi el nom de la variable als eixos i explica el perquè l'has triat. Si no pots trobar el gràfic que desitges, dibuixa'n un que hi vagi bé.

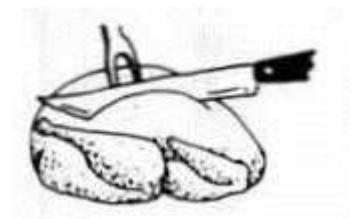
1. El cafè s'està refredant.

Temps (minuts)	0	5	10	15	20	25	30
Temperatura (°C)	90	79	70	62	55	49	44



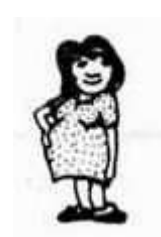
2. Temps de cocció d'un gall dindi.

Pes (kg)	3	4	5	6	7	8	9	10
Temps (hores)	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6



3. Com creix un bebè abans de néixer.

Edat(mesos)	2	3	4	5	6	7	8	9
Llargada (cm)	4	9	16	24	30	34	38	42



4. Després de veure cervesa.



Temps (hores)	1	2	3	4	5	6	7
Alcohol a la sang (mg/100 ml)	90	75	60	45	30	15	0

5. Nombre d'espècies d'ocells en una illa volcànica.

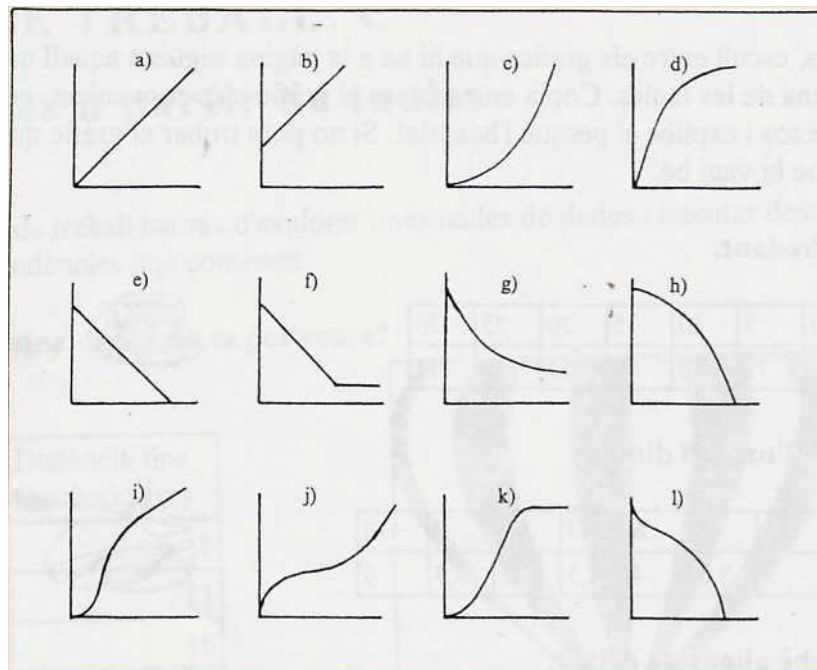
Any	1.880	1.890	1.900	1.910	1.920	1.930	1.940
Nombre d'espècies	0	1	5	17	30	30	30



6. Esperança de vida.



(anys)	Nombre de supervivents	Edat (anys)	Nombre de supervivents
0	1.000	50	913
5	979	60	808
10	978	70	579
20	972	80	248
30	963	90	32
40	950	100	1



A.4. Una polsada correspon a 2,54 cm, i indiquem per la lletra x un valor en polsades i per y el seu equivalent en centímetres:

- Escriu la fórmula per passar de polsades a cm utilitzant les variables x i y .
- Ompli la taula següent:

X (polsades)	0	0.1	0,5	1	1.5	2	3	5	6	10
y (cm)										

- Fes un gràfic de la funció. De quin tipus és aquesta funció?

DEPENDÈNCIA ENTRE LA VARIABLE INDEPENDENT I LA DEPENDENT

Les situacions anteriors expressaven "dependència" entre dues quantitats variables.

Aquesta "dependència" pot venir donada de diverses formes :

- per un gràfic,
- per una taula,
- per una regla, fórmula, ...

Sigui quina sigui la manera d'expressar-la, les característiques comunes d'aquestes situacions són:

- que hi ha dues variables,
- que una depèn de l'altra: els valors que pren una d'elles venen donats pels que agafa l'altra.

Considerem per exemple la funció de la taula A de l'exercici A.1:

t (min)	T (°C)
0	-20
0.5	-10
1	0
2.5	0
3	20
4	80
4.5	100
5	100

Hi ha dues variables: el temps i la temperatura. El temps en minuts pot agafar **qualsevol** valor dins del conjunt dels nombres reals positius entre 0 i 5, per això l'anomenem **variable independent**. La temperatura de la substància **depèn** o **és funció** del temps; disposem d'una taula que ens permet, donat el temps, determinar la temperatura. La taula assigna a **cada** valor del temps **un i només un** valor de la temperatura. Direm que la temperatura és la **variable dependent**; aquesta variable pren valors en el conjunt dels nombres reals més grans o iguals que -20.

(Els **nombres reals** són els nombres que obtenim com a resultat d'una mesura, per tant són els nombres decimals tant positius com negatius, enters o no).

CORRESPONDÈNCIA I FUNCIO

Tal com hem vist a l'exemple anterior una funció està formada per:

a) Un conjunt A de valors que pot agafar la variable independent, anomenat **domini** de la funció.

b) Un conjunt B de valors que pot agafar la variable dependent, anomenat **conjunt d'arribada**.

c) Una regla que assigna a **cada** element del domini **un i només un** element del conjunt d'arribada.

En el cas que la regla no compleixi la condició que a cada element li correspongui **un i només un** element del conjunt d'arribada, direm que la relació entre els dos conjunts no és una funció. En aquest cas direm que només és una **correspondència**.

A.5. La taula següent indica el cost d'enviar una carta segons el seu pes. És la taula que fan servir els estanquers per saber el segell que cal posar a la carta.

Pes de la carta (g)	Preu del segell (€)
fins a 20	0.28
de 20 a 50	0.40
de 50 a 100	0.63
de 100 a 250	1.05
de 250 a 500	2.00
de 500 a 1000	2.85

- Digues quina és la variable independent i quina la variable dependent.
- La regla que determina la relació entre les dues variables fa que aquesta relació sigui una funció? Per què?
- En el cas que sigui funció digues quin és el domini de la funció, suposant que una carta pot pesar com a màxim 1000 g, i quin és el conjunt d'arribada.
- Fes el gràfic d'aquesta funció posant la variable independent a l'eix d'abscisses (l'eix que va d'esquerra a dreta) i la dependent al d'ordenades.

A.6. Considera l'exercici anterior sobre el franqueig de les cartes.

- Fes la representació gràfica de la relació entre les dues variables si intercanviem el domini pel conjunt d'arribada, o sigui si posem la variable pes a l'eix d'ordenades i la variable preu a l'eix d'abscisses.
- Aquesta relació que has representat, és una funció?

A.7. Per a cadascuna de les funcions de l'exercici **A.1** i **A.2**, contesta:

- Quina és la variable independent i quina la dependent.
- Es tracta d'una funció?
- Quin és el domini i quin el conjunt d'arribada.
- Si intercanviem el domini pel conjunt d'arribada, seria una funció?

A.8. Prenent com a conjunt inicial i conjunt d'arribada els nombres reals, i com a regla la que assigna a cada nombre real la seva arrel quadrada:

- La correspondència així definida és una funció? Raoneu la resposta.
- I si el domini fos el conjunt dels nombres reals positius?
- I si a més la regla assigna a cada nombre la determinació positiva de l'arrel quadrada?

SIMBOLITZACIÓ D'UNA FUNCIÓ

Considerem una altra vegada la funció de l'exercici A.3, del franqueig de les cartes.

És còmode posar un nom a la funció : l'anomenarem funció **f**. (Hauríem pogut posar-li un altre nom d'una o més lletres).

f està formada per dos conjunts:

A = Nombres reals de 0 i 1000. Aquest és el conjunt de sortida o **domini** de la funció

B = Nombres reals de 0.28 a 2.85. És el **conjunt d'arribada** i una regla (la taula de l'estanquer).

Per indicar que **f** és una funció d'A en B escriurem:

$f : A \longrightarrow B$ ho llegirem "f és una funció d'A en B "

La variable independent és el pes i la variable dependent el preu. Direm que el **preu és funció del pes**. Esquemàticament ho escriurem:

Preu = f (pes) que ho llegirem "el preu és funció del pes"

o bé ho escriurem:

pes \longrightarrow preu = f (pes)

i anomenant **x** al pes i **y** al preu

$x \longrightarrow y = f(x)$ que es llegeix "a **x** li correspon **y** ; **y** és igual a **f** de **x**"

Continuant amb l'exemple de les cartes, per indicar que el franqueig d'una carta de 24 g és de 0.40 € s'utilitza el simbolisme:

24 \longrightarrow 0.40

o bé $f(24) = 0.40$

o bé 24 $\longrightarrow f(24) = 0.40$

També hi ha altres maneres d'expressar-ho amb una frase:

- dir que 0.40 és la **imatge** de 24, o bé
- que a 24 li correspon 0.40, o bé
- que 24 és la **antiimatge** de 0.40.

Observa que les imatges són sempre elements del conjunt d'arribada, i les antiimatges són elements del domini.

A.9. Si **f** és la funció del franqueig de les cartes:

- a) Quina és la imatge de 110? Escriu-ho amb llenguatge simbòlic.
- b) Indica una antiimatge de 0.63. Expressa-ho amb llenguatge simbòlic.
- c) Quins nombres del conjunt d'arribada tenen antiimatges?

A.10. Si **h** és una funció, expressa en forma simbòlica:

- a) 3 és la imatge de 2 per la funció **h**.
- b) -5 és antiimatge d' 1 per la funció **h**.
- c) a 1/2 li correspon 1/4 per la funció **h**.
- d) La funció **h** és una funció d' A en B.
- e) **y** és la imatge de **x** per la funció **h**.

A.11. Considera la funció de l'exercici A.2 del canvi de polsades a centímetres. Recorda que la fórmula de la funció era $y=2,54x$ on "**x**" són les polsades i "**y**" els centímetres. Si anomenen **f** aquesta funció, completa els requadres i parèntesi següents i fes en cada cas **dues frases** que signifiquin el mateix que el llenguatge simbòlic:

una frase utilitzant les paraules específiques del llenguatge de funcions,
i una altra frase que la pugui entendre una persona que no conegui aquest llenguatge.

a) $f(10)=$ b) $f(6)=$ c) $2 \rightarrow f()=$

d) $f(x)=$ e) $f()= 322$

A.12. Considerem ara la funció que assigna a cada nombre el seu quadrat. Anomenant **g** aquesta funció, completa els requadres i parèntesis de les expressions següents i fes una frase en cada cas:

a) $g: \square \rightarrow \square$ b) $1 \rightarrow g(\)$ c) $g(-3) = \square$

d) $g(0) = \square$ e) $5 \rightarrow \square$ f) $1^2 \rightarrow g(\)$

g) $\sqrt{3} \rightarrow g(\) = \square$ h) $2 \rightarrow g(\) = \square$

i) $x \rightarrow g(\) = \square$ j) $\square \rightarrow g(\) = 81$

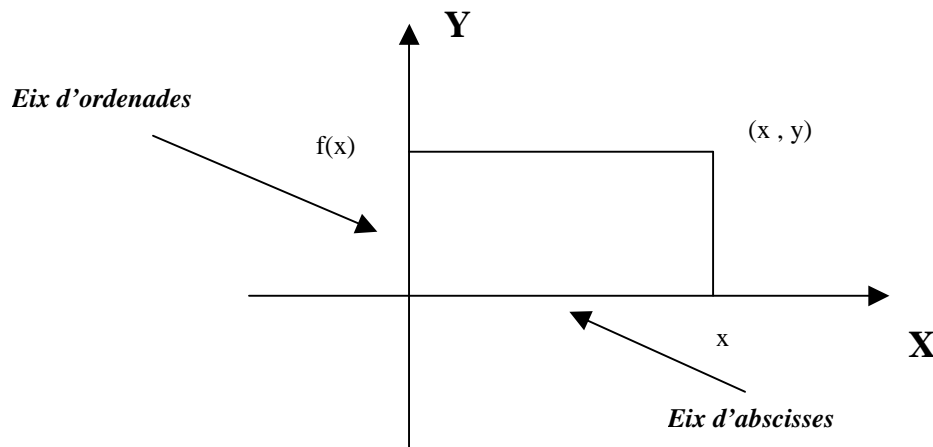
GRÀFICS CARTESIANS

Un gràfic cartesià està representat en un **sistema de referència de coordenades cartesianes**, que ve determinat per dos **eixos de coordenades**, que són dues rectes perpendiculars graduades que s'anomenen eix d'**abscisses** i eix d'**ordenades**.

Per representar gràficament una funció situem la variable independent a l'eix d'**abscisses**, i la variable dependent al d'**ordenades**. La variable independent moltes vegades s'expressa amb la lletra **x** i aleshores a l'eix d'abscisses se'l pot anomenar **eix x** o **eix de les x**. La variable dependent s'acostuma a expressar amb la lletra **y** i aleshores a l'eix d'ordenades se'l pot anomenar **eix y** o **eix de les y**.

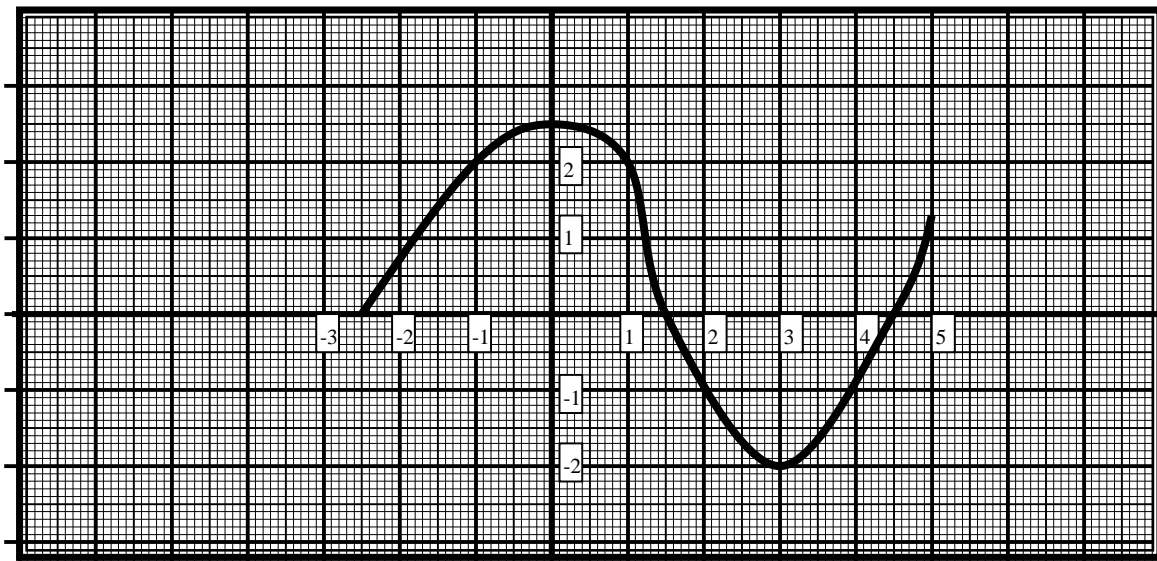
Cada punt del gràfic de la funció és caracteritzat per un parell de nombres, el primer del domini i el segon del conjunt d'arribada, de manera que el segon és la imatge del primer per la funció.

El que fem doncs en dibuixar un gràfic d'una funció **f** és representar en un sistema de referència cartesià els punts representatius de tots els parells ordenats de nombres reals **(x, y)** de manera que **y = f(x)**.



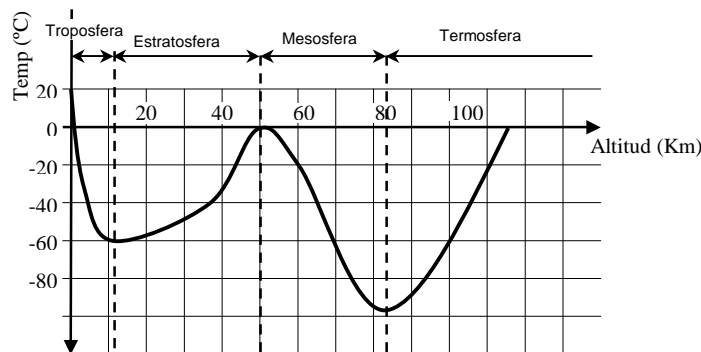
A.13. Observa el gràfic següent de la funció h , completa les línies de punts i expressa cada frase en llenguatge simbòlic:

- a) La imatge de -1 és
- b) La imatge de és $2'5$.
- c) Les tres antiimatges de 0 són, i
- d) Les..... de -1 són 2 i
- e) 1 és la de, de i de



B. Comportament global d'una funció

B1. La temperatura de les diferents capes atmosfèriques no decreix regularment en funció de l'altitud, com podríem pensar basant-nos en la nostra limitada experiència. Els estudis fets ens diuen que la temperatura varia segons l'altitud i ho fa de la manera que ens indica el gràfic següent:




Si en diem f a la funció, x a l'altitud i T a la temperatura:

- Digues quina és la variable independent, la dependent, el domini i el conjunt d'arribada.
- Quina és la temperatura a 10 km d'altitud? Expressa-ho en forma simbòlica. Quina és la temperatura més baixa de la mesosfera?
- Dins quines capes atmosfèriques la temperatura augmenta contínuament en funció de l'altitud?
- A quina capa atmosfèrica fa més fred? A quina altitud?
- Resumeix les observacions fetes a partir del gràfic tot completant la següent taula de comportament de la funció:

Altitud	de 0 a 12 km	12 km	de 12 a 50 km	50 km	de 50 a 85 km	85 km	de 85 a 112 km
Temperatura	disminueix	-60°					
		Mínim relatiu					

f) La taula de l'apartat anterior la podem fer de forma més simbòlica. Completa la taula:

x (km)	(0, 12)	12	(12, 50)				
T (°C)		-60					
		MIN		MAX			

INTERVALS I SEMIRECTES

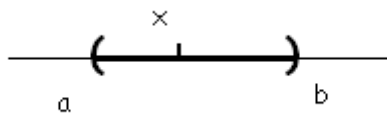
A l'última taula de l'exercici anterior per indicar les altituds de l'estratosfera, és a dir valors entre 12 i 50 km, ho hem fet amb la notació $(12, 50)$. De manera que si una altitud x pertany a l'interval vol dir que està entre 12 i 50:

$$x \in (12,50) \Leftrightarrow 12 < x < 50$$

Aquest tipus d'interval en direm **interval obert** perquè no inclouen els extrems, és a dir ni 12 ni 50 pertanyen a l'interval. Si volem que hi siguin els extrems haurem d'expressar-ho com $[12, 50]$, que és **un interval tancat**:

$$x \in [12,50] \Leftrightarrow 12 \leq x \leq 50$$

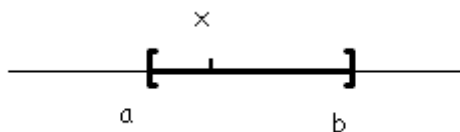
Interval obert d'extrems a i b , essent $a < b$, és el conjunt de tots els punts que estan entre a i b , **exclusos** els extrems. És a dir, l'interval obert (a, b) és el conjunt de tots els punts x tals que $a < x < b$. Gràficament:



x pertany a l'interval : $x \in (a,b)$
però $a \notin (a,b)$ i $b \notin (a,b)$

ATENCIÓ: Observa que es fa servir una mateixa notació per a dues coses ben diferents: $(1, 2)$ pot significar, segons el context, **les coordenades d'un punt del pla** o bé **un interval obert**, o sigui un conjunt de nombres. Si a més considerem que podria ser el nombre decimal 1,2 entre parèntesi, caldrà fixar-se, segons la situació, quin significat cal donar-li.

Interval tancat d'extrems a i b , essent $a < b$, és el conjunt de tots els punts que estan entre a i b , **inclosos** els extrems. És a dir, l'interval tancat $[a, b]$ és el conjunt de tots els punts x tals que $a \leq x \leq b$ Gràficament:



x pertany a l'interval : $x \in [a,b]$
però $a \in [a,b]$ i $b \in [a,b]$

B2.

- Dibuixa els intervals següents: $(1, 5)$, $(-2, 3)$, $[0, 3.5]$.
- Indica, utilitzant la notació simbòlica, si cadascun dels nombres, -2.5; -2; -1/2; 0; 1; 1.2; 3.49; 3.5 i 3.501 pertanyen o no als intervals de l'apartat a).

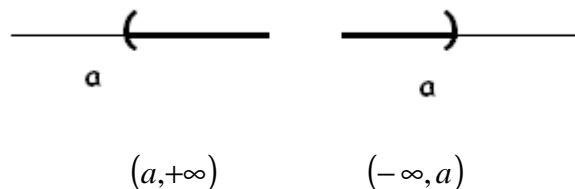
A vegades podem considerar conjunts de nombres reals com ara els valors que podria prendre la variable POLSADES a l'exercici A.2 si pensem que qualsevol valor podria tenir

sentit **per gran que sigui**. Aleshores el conjunt que tindriem el representariem com una semirecta. Això ens porta a definir un altre tipus d'interval que són les semirectes obertes i les semirectes tancades :

La **semirecta oberta** $(a, +\infty)$ és el conjunt de punts que estan a la dreta d' a exclòs l'extrem a. És a dir és el conjunt de punts x tals que $a < x$. El símbol $+\infty$ es llegeix "més infinit" i no és cap nombre; indica justament que qualsevol nombre més gran que a, per gran que sigui, pertany a l'interval.

La **semirecta oberta** $(-\infty, a)$ és el conjunt de punts que estan a l'esquerra d' a exclòs l'extrem a. És a dir és el conjunt de punts x tals que $x < a$. El símbol $-\infty$ es llegeix "menys infinit" i no és cap nombre; indica justament que qualsevol nombre més petit que a, per petit que sigui, pertany a l'interval.

Gràficament:



De manera semblant podem definir les **semirectes tancades** pel seu extrem:

$[a, +\infty), (-\infty, a]$ que són com les obertes però incloent-hi l'extrem a. Observa que pel costat de l'infinit sempre posem un parèntesi perquè l'infinit no és cap nombre, no pertany a la semirecta.

B3.

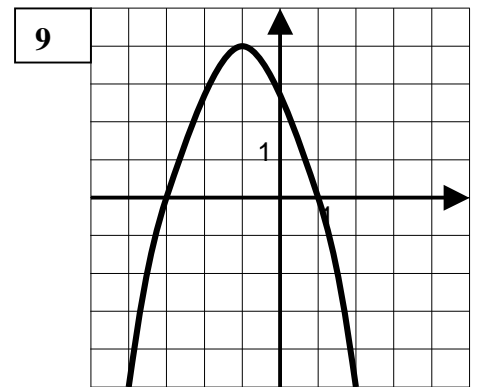
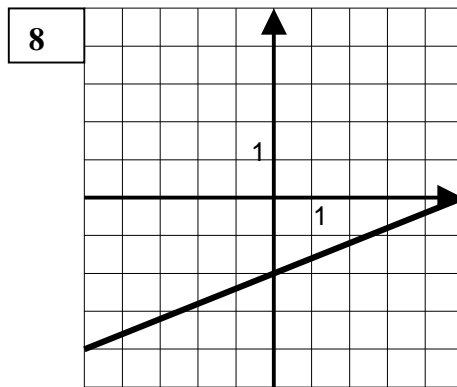
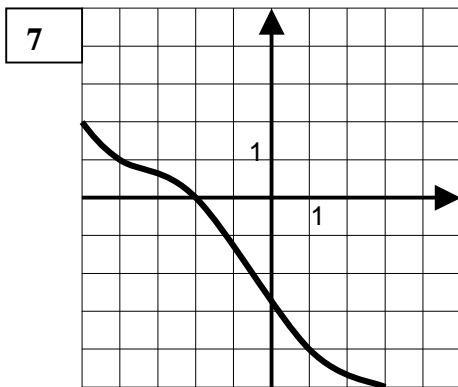
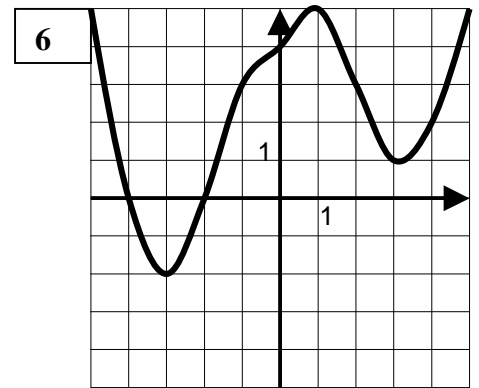
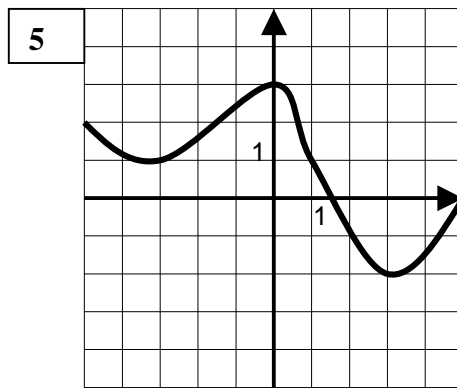
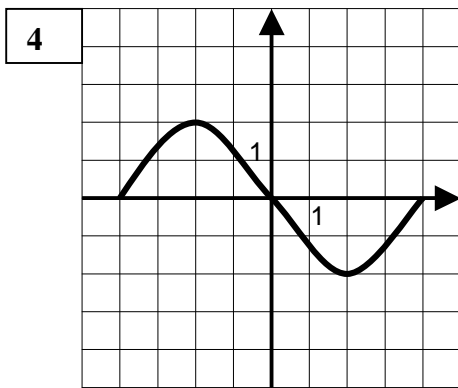
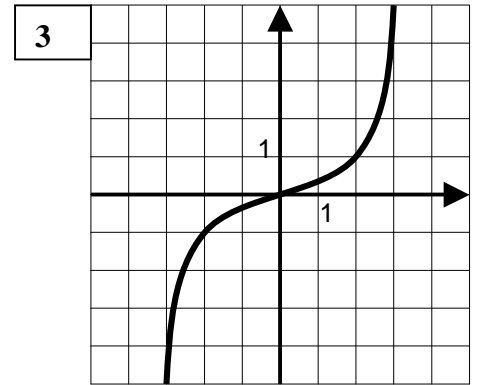
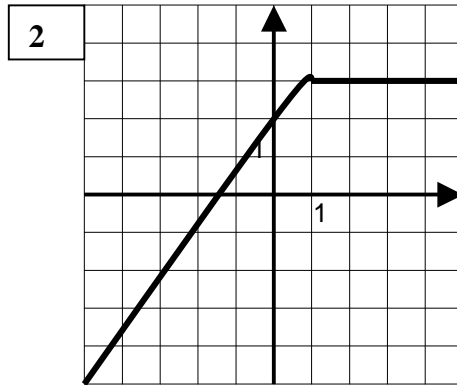
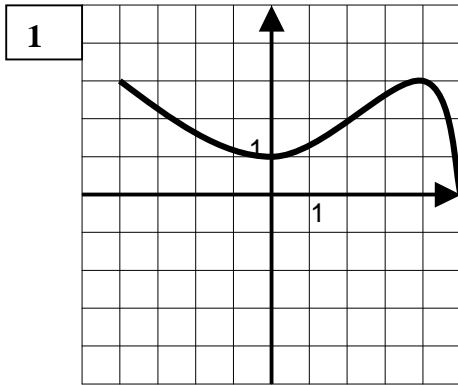
- Dibuixa les semirectes següents: $(0, +\infty), [-2.3, +\infty)$ i $(-\infty, 3.5]$
- Indica, utilitzant la notació simbòlica, si cadascun dels nombres, -2.5 ; -2 ; $-1/2$; 0 ; 1 ; 1.2 ; $\sqrt{2}$; 3.49 ; 3.5 i 3.501 pertanyen o no a les semirectes de l'apartat a).

B4. Coneixent certes característiques d'una funció , és possible reconèixer el seu gràfic i fins i tot construir-lo.






D'entre els gràfics indicats, **identifica** aquells que puguin ser gràfics de les funcions, les característiques de les quals donem a continuació. Feu per cada gràfic **una taula** del comportament de la funció utilitzant els intervals i semirectes (com a l'apartat f de l'exercici B.1): creixement, decreixement, màxims i mínims.

- La funció **a** té un màxim en el punt d'abscissa -2 , un mínim en el punt d'abscissa 2 i passa per l'origen de coordenades.
- La funció **b** és sempre decreixent i passa pel punt $(-2, 0)$.
- La funció **c** té dos mínims i un màxim i passa pel punt $(0, 4)$.
- La funció **d** és sempre decreixent excepte en l'interval $(0, 4)$ on és creixent, i $d(0)=1$ i $d(4)=3$.
- La funció **e** és creixent en l'interval $(-\infty, +1]$ i constant en l'interval $[1, +\infty)$

- f) La funció f té un sol màxim i talla l'eix d'abscisses en els punts -3 i 1 .
 g) La funció g no té cap màxim ni cap mínim.



B5. Dibuixa el gràfic de la funció f que té la següent taula de comportament: i de la qual també sabem que talla l'eix d'abscisses en els punts $(-5,0)$, $(1.5,0)$ i $(3,0)$

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 2)$	2	$(2, 4)$	4	$(4, 5)$	5	$(5, +\infty)$
$f(x)$		-6		3		-2		-1	
		mín		max		mín		màx	

B6. REINVENTEM LA LLAUNA DE REFRESC

QÜESTIÓ PRÈVIA

Imagina que tens dues llaunes amb formes diferents però que en les dues hi ha la mateixa quantitat de líquid. ¿han de tenir, per força, la mateixa quantitat d'alumini?. Raona la resposta i si cal posa exemples concrets amb dades inventades i càlculs.

INTRODUCCIÓ

L'any 1914 Asa Candler, president de Coca Cola, va encarregar a un artesà del vidre anomenat Earl Dean que inventés una ampolla pel seu producte. Earl Dean va confondre el producte i pensant que era una espècie de *cacaolat* va fer l'ampolla amb la forma del fruit del cacao, però la casualitat va fer que aquesta ampolla tingués una forma sinuosa que recorda el cos d'una noia i aquest va ser una de les claus del seu èxit. L'artesà va patentar l'ampolla i es va fer multimilionari ja que per cada ampolla venuda ell cobrava una petita quantitat.



Actualment, a més de l'ampolla, s'utilitza una llauna d'alumini, l'any 1996 es va intentar fabricar una llauna amb la mateixa forma que l'ampolla però el cost de l'alumini ho va desaconsellar. En el seu disseny actual influeixen, per tant, més els factors econòmics i pràctics que no pas estètics.



En una llauna de Coca Cola hi caben, exactament, 333 cm^3 de refresc (un terç de litre), però, com ja hem vist, es podrien fabricar molts tipus de llaunes diferents amb la mateixa capacitat, i, si bé la seva forma obeeix a factors econòmics, no obeeix a factors ecològics perquè la forma triada no és la que utilitza la mínima quantitat de material.

¿Quina és la llauna cilíndrica més ecològica?

Les matemàtiques són molt útils per gran quantitat de coses. Una de les aplicacions que s'ha posat *de moda* a partir de la segona guerra mundial són els problemes d'optimització. És a dir, els problemes en que es calculen tots els paràmetres industrials que fan mínims els costos. Actualment no hi ha cap factor industrial que obeeixi a l'atzar, tot té unes raons matemàtiques de fons.

El problema de la llauna de Coca Cola és un clar exemple. La seva forma no és fruit de l'atzar i obeeix a raons purament econòmiques, però ¿quina forma tindria si es volgués prioritzar l'ecologia?



Estudiem a fons aquesta qüestió.

Volem fer una llauna cilíndrica de 333 cm^3 volem conèixer quin ha de ser el radi i quina ha de ser l'altura per a que la quantitat d'alumini sigui mínima.

Com que el volum sempre ha de ser el mateix, si la fem més ampla haurà de ser més baixa i si la fem més prima haurà de ser més alta.



Això vol dir que no podem triar l'altura per que depèn del radi que sí el podem triar:

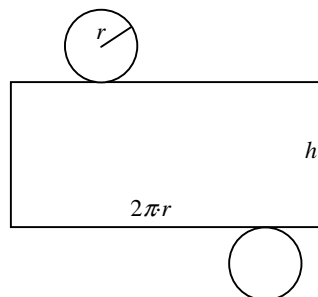


$$V = \pi r^2 \cdot h = 333 \text{ Aïllant l'altura}$$

$$\text{tenim que } h = \frac{333}{\pi \cdot r^2}$$

Ara ens podem inventar diferents valors pel radi i calcular, en primer lloc, quina altura ha de tenir i en segon lloc quina quantitat d'alumini es gasta es a dir la superfície

$$S = 2\pi r \cdot h + 2\pi r^2$$



Tots aquests càlculs es poden fer a la taula següent. En acabar-los, la llauna millor serà la que tingui menys superfície.

a) Omple la taula següent

RADI	$h = \frac{333}{\pi \cdot r^2}$	$S = 2\pi \cdot r \cdot h + 2\pi \cdot r^2$
1		
1,5		
2		
2,5		
3		
3,5		
4		
4,5		
5		
5,5		
6		
6,5		
7		
7,5		
8		
8,5		
9		
9,5		
10		

b) Fes un gràfic en que la superfície depengui del radi



- Entre quins valors del radi es troba la llauna d'inferior superfície?
- Amb la calculadora tempteja valors en l'anterior interval per tal de trobar el radi que minimitzi més la superfície.
- Quin és per tant el radi que fa que la llauna utilitzi menys alumini?
- Calcula ara la altura que hauria de tenir la llauna. Recorda que $h = \frac{333}{\pi \cdot r}$.
- Construeix amb cartolina la llauna més ecològica i explica detalladament quins poden ser els motius per què la Coca Cola no utilitzi aquesta llauna.

B7. REINVENTEM EL TETRA BRIK

L'origen del nom **Tetra Brik** és per què originàriament aquest envasos tenien forma de tetràedre (una piràmide formada amb 4 triangles equilàteres). Avui dia aquest envàs s'ha estès en el nostre mercat sent un article quotidià a la nostra llar. Actualment al mercat es poden trobar 3 Tetra Brics diferents per posar 1 litre de llet. A part del de sempre n'hi ha un una mica més estret i més alt i un altre amb base quadrada. La qüestió és ¿en quin dels tres hi ha menys cartró? I ¿es pot construir un quart model que encara utilitzi menys cartró?. En aquesta activitat intentarem esbrinar aquesta qüestió



Abans de començar, experimenta.

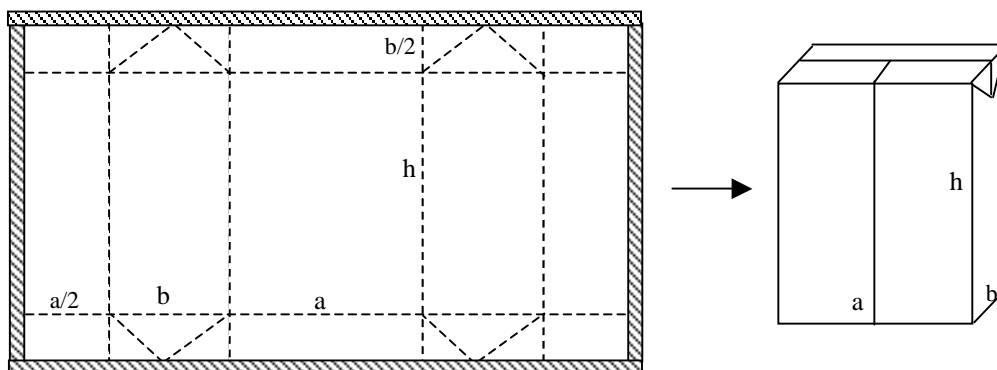
Busca al mercat els tres Brics d'1 litre que hi ha. Despega el cartró i observa'ls. Calcula la superfície de cartó que empra cada un dels dissenys i el volum.

1. ¿És el volum dels tres envasos iguals? Quin és aquest volum?
2. És la superfície dels tres envasos igual? Quina és la superfície de cada un d'ells?
3. Quin és l'envàs més ecològic? Es a dir, quin utilitza la mínima quantitat de cartró?

A l'experimentació anterior hem comprovat que és possible fabricar Brics amb el mateix volum i diferent superfície. Aquest fet ens mou a pensar en la possibilitat de dissenyar el Brik més ecològic del món. Es a dir, el que utilitzi la mínima quantitat possible de material ¿és això possible?

Analitzem el problema

- En desplegar un Tetra Brik observem que queda un cartró rectangular:



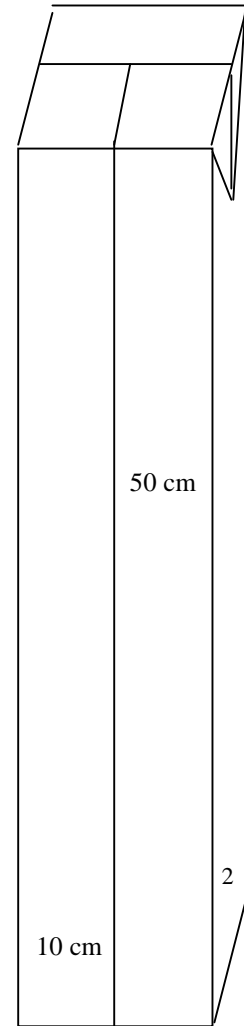
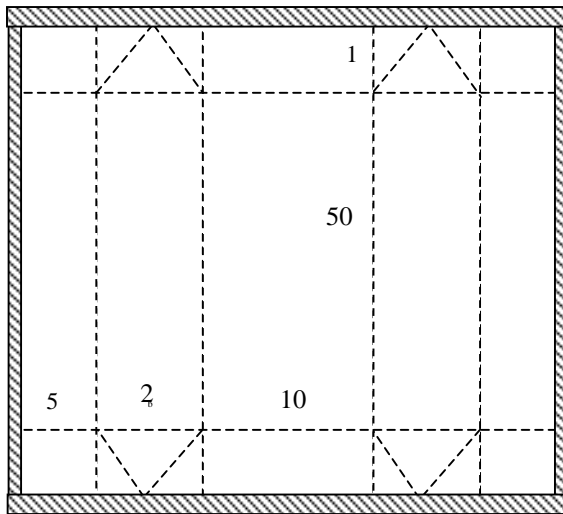
Sabem que el volum és $V = a \cdot b \cdot h = 1000 \text{ cm}^3$

Si volem inventar-nos un Brik nou, podem inventar-nos un nou valor per a , també podem inventar-nos el valor que vulguem per b però si també ens inventem un valor per h no podem garantir que el volum sigui, efectivament 1000 cm^3 . Així, doncs, haurem de renunciar a triar al menys un dels tres valors, per exemple h , d'aquesta manera el valor d' h queda obligat pel fet que $a \cdot b \cdot h = 1000 \text{ cm}^3$ i dependrà directament d' a i de b :

$$h = \frac{1000}{ab}$$

Per exemple, imaginem que volem fabricar un Brik que faci $a = 10$ cm i que $b = 2$ cm aleshores forçosament $h = \frac{1000}{10 \cdot 2} = 50$ i així tindríem un Brik de mig metre d'altura que continuaria tenint un litre de volum.

Aquest Brik pot ser seria divertit però de cap manera seria ecològic ja que la el cartró emprat seria excessiu:



$$S = (5+2+10+2+5)(50+2) = 1248 \text{ cm}^2$$

Més d'un metre quadrat de material!

Resumint: si el volum és $V = a \cdot b \cdot h = 1000 \text{ cm}^3$ i triem a i b , aleshores $h = \frac{1000}{ab}$

I la superfície (sense tenir el compte les petites solapes que permeten pegar el brik) és $S = B \cdot H = (2a+2b) \cdot (h+b)$, aïllant la h pel seu valor, podem calcular directament la superfície fent:

$$S = (2a + 2b) \left(\frac{1000}{ab} + b \right)$$

Ataquem el problema

Per trobar el millor tetrabrik sembla que no ens queda més remei que anar provant diferents valors per a i per b i anar calculant la superfície anterior amb la fórmula. Suposem que provem tots els valors des d'1 fins a 20 cm per a i també per b , això en obligaria a provar la fórmula amb $20 \times 20 = 400$ valors diferents

Una possibilitat seria treballar en equip.

- Assignem un valor d' a diferent per cada u de vosaltres.
- I utilitzant sols aquest valor d' a aneu provant amb diferents valors de b .
- L'alumne que trobi la superfície més petita serà que ha trobat el bric més ecològic.

ANEM PER FEINA:

Nom : _____ Valor d' a assignat

a) **Omple taula de valors:** recorda que $S = (2a + 2b)\left(\frac{1000}{ab} + b\right)$

$b =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$S =$															

c) **Fes el gràfic a la pàgina següent:**

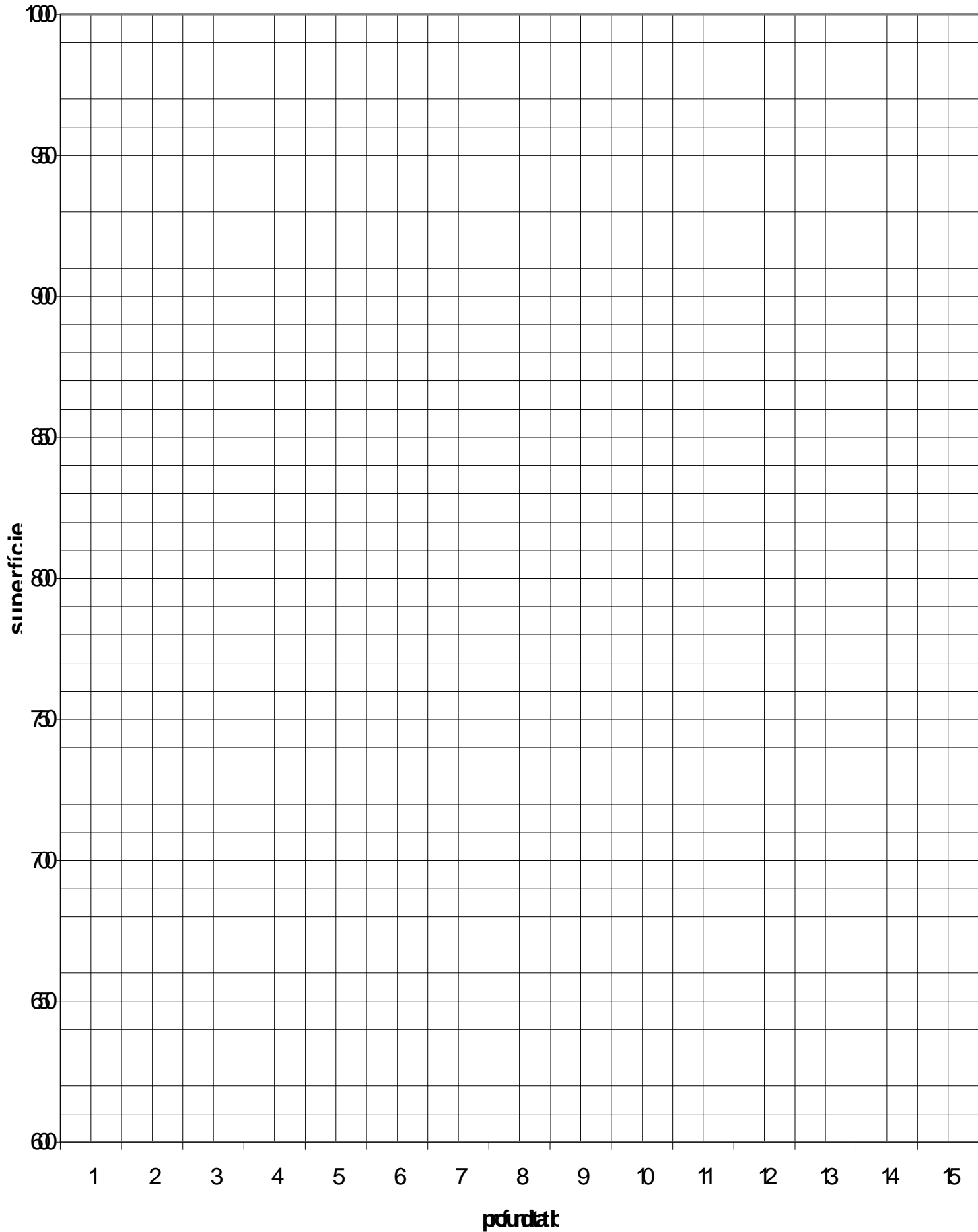
- d) Observant el gràfic, quin valor de b fa que la superfície sigui mínima pel teu valor d' a ?
- e) Hi ha algun company que tingui un valor de la superfície més petita que tu?, per quins valors d' a i b ha obtingut aquesta superfície mínima. Quina és aquesta superfície?
- f) Construeix amb cartró un Brik amb aquestes dimensions. A quin model de la fotografia correspon?



- g) Coincideix amb les d'alguns dels tres briks que hi ha al mercat?
- h) Quins creus que poden ser els motius que mouen a triar un model determinat en una fàbrica d'envasos?



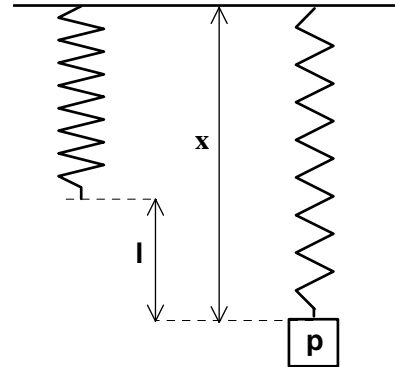
superfície per diferents valors de x



C. Funció polinòmica de primer grau

C1. Llei de Hooke.

Si pengem un pes a una molla, aquesta s'allarga. Si disposeu d'una molla podeu fer l'experiment: anar penjant cada vegada un pes més gran i mesurar la llargada de la molla per cada pes. Si ho feu aneu amb compte de penjar-hi pesos no massa grans que podrien deformar la molla.



a) Disposeu les dades obtingudes en una taula. Si no heu pogut fer l'experiment podeu usar les dades següents:

p : pes (kg)	0	0,5	1	1,5	2	2,5
x : longitud de la molla (cm)	6	10	14	18	22	26

b) Representeu la funció que ens dóna la longitud de la molla segons el pes. Quin és el domini d'aquesta funció? Té sentit unir els punts del gràfic?

c) Intenteu trobar la fórmula de la funció.

(Si no us en sortiu podeu fer una nova taula en la qual la variable dependent, que en direm x, sigui la longitud de la molla descomptant la longitud que tenia abans de penjar-hi cap pes:

p : pes (kg)	0	0,5	1	1,5	2	2,5
l : augment de la longitud de la molla (cm)	0	4	8			

Trobeu la relació entre l i p i després la que hi ha entre x i p.

C2. Representa en un mateix sistema de coordenades els gràfics de les funcions següents:

a) $f(x) = 2x$

b) $h(x) = 2x + 5$

c) $l(x) = 2x + 1$

d) $g(x) = 2x - 4$

e) $k(x) = 2x - 3$

m) $t(x) = 2x + 3$

C3. Representa en un mateix sistema de referència els gràfics de les següents funcions:

a) $f(x) = x$

b) $f(x) = \frac{1}{2}x$

c) $y = 2x$

d) $f(x) = -x$

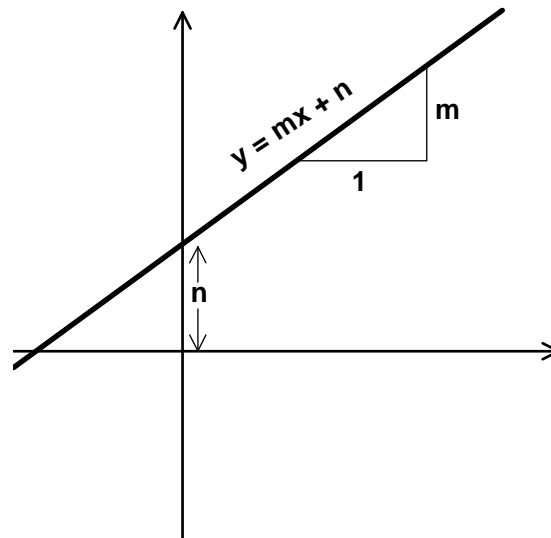
e) $y = -\frac{1}{2}x$

f) $f(x) = -2x$

C4. Observa els gràfics de les funcions de l'exercici **C.3** i contesta:

- Què tenen en comú i en què es diferencien aquests 6 gràfics? Classifica les rectes en creixents i decreixents.
- Observant les equacions del problema anterior intenta donar un model d'equació que serveixi per totes.
- Com és el gràfic de la funció tipus $y = mx$, on m és un nombre real que s'anomena pendent de la recta? En quin punt tallen aquests gràfics l'eix d'ordenades? Si una recta és creixent, quin signe té el seu pendent? I si és decreixent?
- Per quin punt passen totes les funcions del problema C2.? A quin punt les rectes aquestes tallen l'eix d'ordenades? Classifica-les en creixents i decreixents.
- De quin paràmetre dependrà la inclinació de les rectes. Quin paràmetre ens indica el punt de tall de la recta amb l'eix d'ordenades?
- Intenta donar un model de funció, una fórmula tipus per les funcions del problema C2.

FUNCIONS QUE TENEN PER GRÀFIC UNA RECTA: FUNCIONS AFINS



Les funcions dels apartats **C.1**, **C.2** i **C.3** que tenen una fórmula del tipus:

$$y = mx + n \quad \text{amb } m \neq 0$$

direm que són **funcions polinòmiques de primer grau** perquè

l'expressió $mx+n$ és un polinomi de primer grau. Així les funcions com $y = 7x+3$,

$y = -\frac{3}{4}x - 5$ o $y = 0,4x$ són funcions polinòmiques de primer grau, i en canvi la

funció $y = 3x^2 - 7$ seria de segon grau.

Una funció polinòmica de primer grau **té per gràfic una recta**.

El coeficient de la x , paràmetre m , és el **pendent** i indica la inclinació de la recta.

El terme independent, paràmetre n , és l'**ordenada a l'origen**, és a dir indica el punt en el qual la recta talla l'eix d'ordenades.

Les funcions de primer grau en què la **n és zero**, tenen per gràfic una recta que passa per l'origen de coordenades: són les **funcions de proporcionalitat**. Tenen per fórmula:

$$y = mx$$

Les funcions de proporcionalitat són funcions polinòmiques de primer grau.

Si el pendent m és zero, aleshores la recta és paral·lela a l'eix d'abscisses, la fórmula general és

$$y = n$$

són les **funcions constants**.

Les funcions constants no són polinòmiques de primer grau.

Les funcions que tenen per gràfic una recta són les **funcions afins**.

C5. Digueu només observant la fórmula i sense fer el gràfic ni donar cap valor, quines de les funcions següents tenen per gràfic una recta. En aquest cas indica quin és el pendent i l'ordenada a l'origen i si són funcions constants o de proporcionalitat.

$$y = 4x + 7$$

$$y = x^2 - 4$$

$$y = \frac{4x-7}{2}$$

$$y = -x$$

$$y = \frac{2}{2x-5}$$

$$y = \frac{3}{2}x + 6$$

$$y = \sqrt{3x-5}$$

$$y = 2x^3 - x + 5$$

REPRESENTACIÓ DE RECTES

Per dibuixar el gràfic de les funcions afins **només cal representar dos punts** del gràfic i unir-los amb una línia recta, és a dir donarem només dos valors a la x . En tot cas si en donem un altre ens servirà només per comprovar que no ens haguem equivocat, perquè si els tres punts no estan alineats és ben segur que haurem fet algun error!

Encara que els dos punts poden ser qualssevol, per tal de fer-ho de forma ràpida és aconsellable seguir un d'aquests 3 mètodes. En tots tres mètodes es comença buscant l'ordenada a l'origen, o sigui es dóna a la x el valor zero i s'obté la intersecció de la recta amb l'eix d'ordenades.

MÈTODE MÉS RÀPID:

Donar a la x els valors: **zero**. Així obtindrem el punt de tall amb l'eix d'ordenades.
el denominador del pendent o un múltiple d'aquest.

MÈTODE DE LA INTERSECCIÓ AMB ELS EIXOS:

Punt de tall amb l'eix d'ordenades: **donarem a la x el valor 0**

Punt de tall amb l'eix d'abscisses: **resoldrem l'equació de primer grau $0 = mx + n$**

MÈTODE DEL PENDENT I L'ORDENADA A L'ORIGEN:

Ordenada a l'origen: **donarem a la x el valor 0**

El pendent és **el coeficient de la x** , i ens indica la inclinació de la recta, és a dir el que puja o baixa la recta per cada unitat de més de la variable independent.

C6. Representa les funcions següents de la forma més ràpida que puguis

a) $y = 2x - 3$ b) $\frac{2}{3}x + 5$ c) $f(x) = -x + 3$ d) $y = -5$ e) $y = -\frac{5}{4}x - 1$

f) $y = \frac{1}{2}x$ g) $y = 0$ i) $y = 6x$ j) $y = -\frac{2}{5}x + 4$ k) $y = -0,5x - 4$